

## PROFIL PEMODELAN MATEMATIS MAHASISWA PADA TUGAS MEA KALKULUS INTEGRAL BERBASIS SIKLUS BLUM DAN LEISS

Diesty Hayuhantika\*<sup>1</sup>, Ratri Candra Hastari<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universitas Bhinneka PGRI, Tulungagung, Indonesia

\*Email Korespondensi: [dieztycha@gmail.com](mailto:dieztycha@gmail.com)

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan profil pemodelan matematis kelompok mahasiswa dalam menyelesaikan tugas Model Eliciting Activity (MEA) pada mata kuliah Kalkulus Integral, berdasarkan tahapan siklus Blum dan Leiss. Penelitian menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus tunggal. Subjek penelitian adalah satu kelompok yang terdiri dari empat mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Bhinneka PGRI yang dipilih secara purposive. Data dikumpulkan melalui rekaman diskusi kelompok, artefak tertulis berupa lembar kerja kelompok, dan wawancara, kemudian dianalisis menggunakan kerangka tujuh tahapan siklus Blum dan Leiss. Hasil penelitian menunjukkan bahwa proses pemodelan berlangsung dalam tiga siklus yang bersifat iteratif dan non-linear. Model berkembang dari model numerik kasar berbasis definisi gradien, menuju model numerik halus berbantuan teknologi, hingga model formal berbasis integral tentu dan Teorema Dasar Kalkulus bagian 2. Secara struktural, siklus pertama bersifat linear dengan validasi retrospektif, siklus kedua menunjukkan integrasi tahapan dan validasi eksternal, sedangkan siklus ketiga ditandai oleh jumping dan local loop sebagai cerminan pemodelan yang semakin matang. Temuan ini mengindikasikan bahwa tugas MEA berbasis antiturunan grafikal mendukung perkembangan pemahaman konseptual secara bertahap dan reflektif.

**Kata Kunci** : Pemodelan Matematis; *Model Eliciting Activity*; Siklus Blum dan Leiss; Kalkulus Integral; Antiturunan Grafikal

### ***Pendahuluan***

Kemampuan pemodelan matematis merupakan salah satu kompetensi fundamental yang perlu dikuasai mahasiswa dalam pendidikan matematika di perguruan tinggi. Pemodelan matematis tidak hanya melibatkan keterampilan komputasi, tetapi juga kemampuan untuk menerjemahkan situasi dunia nyata ke dalam representasi matematis, mengolah representasi tersebut, serta menginterpretasikan hasilnya kembali ke dalam konteks asal guna memperoleh solusi yang bermakna (Blum & Leiss, 2007). Kompetensi ini semakin relevan seiring dengan tuntutan abad ke-21 yang mengharuskan lulusan perguruan tinggi mampu memanfaatkan matematika sebagai alat untuk memahami dan memecahkan permasalahan nyata yang kompleks (Kaiser & Brand, 2015). Berbagai dokumen kurikulum, baik internasional maupun nasional, secara konsisten menempatkan pemodelan matematis sebagai salah satu kemampuan tingkat tinggi yang perlu dikembangkan secara eksplisit dalam pembelajaran, bukan sekadar sebagai dampak tidak langsung dari penguasaan prosedur (Cevikbas et al., 2022; Chamberlin et al., 2020; Lozada et al., 2023; Schofield, 2013).

Dalam konteks ini, mata kuliah Kalkulus Integral merupakan salah satu wahana yang potensial untuk mengembangkan kemampuan pemodelan matematis, mengingat banyaknya fenomena nyata yang dapat direpresentasikan melalui konsep integral. Secara lebih spesifik, topik antiturunan grafikal, yakni merekonstruksi profil suatu fungsi berdasarkan grafik turunannya, merupakan konteks yang kaya untuk tugas pemodelan. Topik ini menuntut mahasiswa membangun hubungan konseptual antara grafik turunan dan fungsi asal, bukan sekadar menerapkan prosedur komputasi yang bersifat rutin (Hitt & Dufour, 2021; García-García & Dolores-Flores, 2021; Pino-Fan et al., 2018)

Untuk menggambarkan proses pemodelan secara sistematis dan dapat diobservasi, Blum dan Leiss (2007) merumuskan kerangka yang dikenal sebagai siklus pemodelan Blum dan Leiss. Kerangka ini membedakan dua domain utama yang saling berinteraksi selama proses pemodelan, yaitu situasi nyata (real world) dan dunia matematika (mathematical world). Perpindahan antara kedua domain tersebut terjadi melalui tujuh tahapan, yaitu *understanding the task*, *simplifying and structuring*, *mathematising*, *working mathematically*, *interpreting*, *validating*, dan *presenting* (Blum & Leiss, 2007). Hal penting yang perlu ditekankan adalah bahwa siklus ini bersifat deskriptif, bukan preskriptif. Dengan kata lain, siklus ini tidak dimaksudkan sebagai urutan langkah yang harus diikuti secara kaku, melainkan sebagai peta konseptual yang menggambarkan berbagai kemungkinan alur yang dapat ditempuh dalam proses pemodelan (Blum, 2015). Dalam praktiknya, proses pemodelan sering berlangsung secara non-linear dan iterative, artinya pemodelan dapat berpindah maju-mundur antar tahapan, merevisi model ketika hasil yang diperoleh belum memadai, hingga representasi awal yang sederhana berkembang secara bertahap menuju

bentuk yang lebih formal dan akurat (Borromeo Ferri, 2006; Lesh & Doerr, 2003; Stillman et al., 2015).

Untuk memunculkan dan mengamati aktivitas pemodelan matematis secara lebih otentik dalam pembelajaran, diperlukan jenis tugas yang secara desain mendorong mahasiswa membangun model matematis secara eksplisit. Dalam artikel ini, pemodelan matematis dipahami sebagai suatu proses siklik yang dimulai dari pemahaman situasi nyata, pembentukan model real, translasi ke dalam model matematis, penyelesaian secara matematis, interpretasi hasil, hingga validasi terhadap konteks asalnya — sebagaimana dideskripsikan dalam siklus Blum dan Leiss (2007). Pemodelan yang dimaksud bukan sekadar penggunaan rumus pada konteks terapan, melainkan proses konstruksi dan rekonstruksi representasi matematis yang bermakna atas suatu fenomena dunia nyata. Model Eliciting Activity (MEA) merupakan salah satu jenis tugas yang dirancang untuk tujuan tersebut. MEA adalah tugas pemecahan masalah berbasis konteks nyata yang menuntut mahasiswa mengonstruksi, merevisi, dan menyempurnakan model matematis sebagai produk utama (Lesh et al., 2000). Dua prinsip utamanya relevan di sini: model construction principle, yang mengharuskan pembentukan model eksplisit sebagai syarat penyelesaian tugas, dan model generalization principle, yang mendorong model yang dihasilkan memiliki keberlakuan lebih luas dari sekadar solusi spesifik (Chamberlin & Moon, 2005; Chamberlin et al., 2020). Karakteristik ini secara alamiah mengaktifasi berbagai tahapan siklus Blum dan Leiss serta mendorong terjadinya pemodelan yang iteratif (Jung & Brady, 2023; Sevinc & Lesh, 2017). Sejumlah penelitian mengonfirmasi bahwa MEA efektif memunculkan proses pemodelan yang kaya dan dapat diobservasi, baik pada jenjang menengah (Handajani et al., 2018; Rusliyah et al., 2021) maupun perguruan tinggi (Chimmalee & Anupan, 2022; Pertamawati & Retnowati, 2019).

Meskipun demikian, terdapat beberapa celah dalam literatur yang menjadi dasar dilakukannya penelitian ini. Pertama, sebagian besar penelitian masih berfokus pada pengukuran kemampuan pemodelan secara umum atau pada identifikasi kesulitan mahasiswa, tanpa mengkaji secara mendalam bagaimana proses pemodelan berlangsung pada setiap tahap dalam konteks tugas tertentu (Aguilar, 2021; Chimmalee & Anupan, 2022; Handajani et al., 2018). Perkembangan model dari representasi awal yang sederhana hingga bentuk yang lebih formal masih jarang dikaji secara mendalam, khususnya di jenjang perguruan tinggi dan dalam konteks kalkulus integral. Kedua, meskipun sifat non-linear dan iteratif dalam pemodelan telah diakui secara teoretis, dokumentasi empiris tentang bagaimana proses tersebut berlangsung secara nyata masih terbatas (Deniz & Kurt, 2022; Shahbari & Tabach, 2020; 2023).

Celah ketiga berkaitan dengan konteks konten: penelitian pemodelan matematis dalam topik antiturunan grafikal masih langka, padahal topik ini memiliki potensi besar untuk mengungkap bagaimana mahasiswa

membangun pemahaman konseptual tentang hubungan fungsi dan turunannya melalui aktivitas pemodelan. Sejumlah studi menunjukkan bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan merekonstruksi fungsi dari grafik turunannya akibat lemahnya pemahaman kovariasional (García-García & Dolores-Flores, 2021; Pino-Fan et al., 2017), namun kajian yang menelusuri bagaimana pemahaman tersebut berkembang melalui pemodelan iteratif belum banyak ditemukan.

Penelitian ini hadir untuk mengisi celah tersebut dengan menggunakan tugas MEA berbasis konteks antiturunan grafikal sebagai sarana memunculkan proses pemodelan, serta siklus Blum dan Leiss (2007) sebagai kerangka analisis. Tugas MEA yang digunakan menyajikan grafik gradien jalur pendakian yang secara matematis merepresentasikan fungsi turunan dari profil ketinggian tanpa skala numerik pada sumbu gradien. Ketiadaan skala ini dirancang agar mahasiswa tidak dapat langsung menentukan nilai ketinggian, melainkan perlu mengembangkan strategi untuk merekonstruksi profil ketinggian dari informasi yang tersedia, sehingga mendorong pengambilan keputusan matematis yang otentik. Siklus Blum dan Leiss dipilih karena tingkat operasionalisasinya yang tinggi serta kemampuannya mengakomodasi alur pemodelan yang tidak linear (Blum & Leiss, 2007; Czocher, 2017; Şener & Dede, 2022).

Kebaruan penelitian ini terletak pada tiga hal. Pertama, penelitian ini mendokumentasikan secara empiris proses pemodelan matematis yang berlangsung dalam tiga siklus iteratif, mulai dari model sederhana hingga model yang lebih kompleks dan formal. Kedua, konteks antiturunan grafikal digunakan secara khusus sebagai arena pemodelan, yang sejauh ini masih jarang dieksplor dalam literatur pemodelan matematis. Ketiga, analisis dilakukan pada level kelompok mahasiswa perguruan tinggi, sehingga memberikan gambaran tentang dinamika kolektif dalam proses pemodelan yang selama ini kurang terdokumentasi.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan profil pemodelan matematis satu kelompok mahasiswa yang berhasil menyelesaikan tugas MEA pada mata kuliah Kalkulus Integral, ditinjau dari tahapan siklus Blum dan Leiss. Pertanyaan penelitian yang diajukan adalah: Bagaimana profil pemodelan matematis mahasiswa dalam menyelesaikan tugas MEA Kalkulus Integral berdasarkan tahapan siklus Blum dan Leiss? Temuan penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran empiris mengenai proses pemodelan matematis mahasiswa, serta menjadi rujukan bagi dosen dalam merancang dan mengevaluasi tugas pemodelan di perguruan tinggi.

### ***Metode Penelitian***

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus tunggal. Pengumpulan data dilakukan dalam setting perkuliahan Kalkulus Integral yang berlangsung secara reguler pada Program Studi

Pendidikan Matematika, Universitas Bhinneka PGRI, pada semester genap tahun akademik 2024/2025. Proses pengambilan data berlangsung selama tiga kali pertemuan, di mana setiap pertemuan merepresentasikan satu siklus pengerjaan tugas MEA.

Pada pertemuan pertama, kelompok mengerjakan tugas MEA dan menghasilkan solusi awal yang kemudian dipresentasikan dalam sesi *sharing solution* kelas. Pada pertemuan kedua, kelompok merevisi solusi berdasarkan refleksi dari diskusi kelas setelah kelompok lain mempresentasikan hasilnya. Pada pertemuan ketiga, kelompok melakukan penyempurnaan model setelah kelompok subjek mempresentasikan hasil siklus kedua dan memperoleh umpan balik. Meskipun proses pembelajaran mencakup diskusi kelas dan sesi *sharing solution*, analisis dalam penelitian ini difokuskan pada model matematis yang dihasilkan kelompok pada setiap siklus beserta tahapan siklus Blum dan Leiss yang dilalui selama proses pembentukannya.

Subjek penelitian adalah satu kelompok yang beranggotakan empat mahasiswa, selanjutnya disebut ST, SS1, SS2, dan SR, yang sedang menempuh mata kuliah Kalkulus Integral pada semester genap tahun akademik 2024/2025. Penentuan subjek dilakukan secara purposif berdasarkan kriteria *information-rich case* (Patton, 2002), yakni kasus yang mampu memberikan informasi paling kaya dan dapat ditelusuri secara analitis untuk menjawab pertanyaan penelitian.

Dari empat kelompok heterogen yang mengikuti pembelajaran, kelompok ini dipilih berdasarkan tiga pertimbangan analitis. Pertama, kelompok ini adalah satu-satunya yang menunjukkan perkembangan model matematis yang dapat direkonstruksi secara kronologis dalam tiga siklus yang teridentifikasi, dari model numerik berbasis estimasi titik, menuju model berbasis akumulasi bertahap, hingga model formal yang mengintegrasikan konsep integral tentu. Kedua, kelompok ini menghasilkan artefak tertulis yang paling lengkap dan terdokumentasi pada setiap siklus, sehingga memungkinkan triangulasi antara rekaman video dan produk tertulis secara memadai. Ketiga, dinamika diskusi kelompok menunjukkan adanya negosiasi konseptual yang eksplisit antar anggota, terutama pada momen transisi antar siklus yang merepresentasikan proses pemodelan iteratif secara lebih teramati dibandingkan kelompok lainnya. Dengan ketiga pertimbangan tersebut, kelompok ini dipandang sebagai kasus paling informatif untuk mendeskripsikan profil pemodelan matematis yang menjadi fokus penelitian ini.

Instrumen utama penelitian adalah tugas MEA Kalkulus Integral yang menyajikan konteks perencanaan jalur pendakian di sebuah taman wisata alam. Tugas ini menyediakan grafik gradien jalur sebagai data utama, yang secara matematis merepresentasikan fungsi turunan  $g(w) = f'(w)$  dari profil ketinggian  $f(w)$  yang harus direkonstruksi oleh mahasiswa. Sumbu gradien pada grafik sengaja tidak dilengkapi dengan skala numerik, dengan tujuan mendorong mahasiswa untuk mengembangkan strategi estimasi secara

mandiri, bukan sekadar membaca nilai dari grafik. Tugas ini merupakan modifikasi dari MEA yang telah dipublikasikan sebelumnya (Hayuhantika et al., 2023; Hayuhantika et al., 2024) dan disesuaikan dengan konteks antiturunan grafikal dalam penelitian ini.

Sebelum digunakan, tugas divalidasi oleh dua validator ahli, yaitu seorang profesor di bidang pendidikan matematika dan seorang doktor di bidang matematika murni, untuk memastikan kesesuaian konteks matematis, keterbacaan, serta kelayakannya sebagai instrumen pemodelan. Proses validasi dilakukan menggunakan lembar validasi yang mencakup aspek kesesuaian dengan prinsip-prinsip MEA, kejelasan situasi kontekstual, serta kecukupan data dalam memunculkan proses pemodelan.

Data dikumpulkan melalui empat sumber yang saling melengkapi. Pertama, rekaman video diskusi kelompok pada setiap pertemuan digunakan sebagai sumber data utama untuk merekonstruksi proses pemodelan secara kronologis. Kedua, artefak tertulis berupa lembar kerja kelompok, sketsa grafik, tabel perhitungan, serta surat elektronik (*email*) yang dihasilkan kelompok pada setiap akhir siklus digunakan sebagai bukti fisik model matematis yang dikonstruksi. Ketiga, catatan lapangan peneliti digunakan untuk mendokumentasikan momen-momen penting, khususnya transisi antar tahapan pemodelan. Keempat, wawancara kelompok semi-terstruktur dilakukan setelah seluruh rangkaian pertemuan selesai untuk mengklarifikasi proses berpikir kelompok pada momen-momen kritis yang memerlukan pendalaman.

Selama proses pengumpulan data, peneliti berperan sebagai pengamat non-partisipan dalam diskusi kelompok. Keterlibatan peneliti dibatasi pada pemberian arahan umum di awal pembelajaran serta fasilitasi diskusi kelas, tanpa intervensi langsung dalam proses diskusi kelompok.

Analisis data dilakukan melalui tiga tahap yang mengacu pada model analisis interaktif Miles, Huberman, dan Saldaña (2014). Pada tahap kondensasi data, seluruh rekaman video ditranskrip secara verbatim, kemudian disegmentasi bersama artefak tertulis ke dalam unit-unit episode berdasarkan tujuh tahapan siklus Blum dan Leiss (2007). Pengkodean dilakukan secara fleksibel dengan memungkinkan satu episode merujuk pada lebih dari satu tahapan, serta satu tahapan muncul berulang dalam alur pemodelan, guna mengakomodasi sifat non-linear dari proses yang terjadi.

Sebagai acuan pengkodean, setiap tahapan dioperasionalkan berdasarkan indikator aktivitas yang dapat diobservasi sebagai berikut. *Understanding the task* dari aktivitas membaca dan mendiskusikan situasi nyata; *simplifying and structuring* dari perumusan asumsi dan pemilihan variabel; *mathematising* dari pembangunan ekspresi atau prosedur matematis; *working mathematically* dari pelaksanaan perhitungan; *interpreting* dari pengaitan hasil matematis ke konteks nyata; *validating* dari pemeriksaan kewajaran hasil; serta *presenting* dari pengomunikasian model dan solusi.

Hubungan antar tahapan dalam setiap siklus direpresentasikan menggunakan notasi alur:

$$“UT” \rightarrow “SS” \rightarrow “MA” \rightarrow “WM” \rightarrow “IN” \rightarrow “VA” \rightarrow “PR” \dots (1)$$

Notasi (1) merepresentasikan alur linear ideal sebagai acuan. Alur aktual pada setiap siklus dianalisis terhadap acuan ini untuk mengidentifikasi fenomena *jumping* (lompatan antar tahapan) dan *looping* (pengulangan tahapan) yang mencerminkan sifat non-linear proses pemodelan yang terjadi.

Pada tahap penyajian data, hasil pengkodean disajikan secara naratif untuk setiap siklus dengan mengintegrasikan kutipan artefak tertulis serta diagram alur tahapan pemodelan. Pada tahap penarikan dan verifikasi simpulan, profil pemodelan kelompok direkonstruksi secara menyeluruh dengan mempertimbangkan ketiga siklus sebagai satu kesatuan, kemudian diinterpretasikan dalam kerangka teoritis siklus Blum dan Leiss.

Keabsahan data dijaga melalui tiga strategi. Pertama, triangulasi sumber dilakukan dengan membandingkan temuan dari rekaman video, artefak tertulis, dan hasil wawancara untuk memastikan konsistensi interpretasi. Kedua, *member checking* dilakukan melalui wawancara pascapenelitian untuk mengonfirmasi interpretasi peneliti kepada anggota kelompok, khususnya pada episode yang bersifat ambigu. Ketiga, diskusi sejawat (*peer debriefing*) dilakukan bersama rekan peneliti yang memiliki keahlian di bidang pendidikan matematika untuk meminimalkan potensi bias dalam interpretasi data (Creswell & Poth, 2018).

### ***Hasil dan Pembahasan***

Bagian ini menyajikan deskripsi profil pemodelan matematis kelompok mahasiswa dalam menyelesaikan tugas MEA Kalkulus Integral, yang diorganisasikan berdasarkan tiga siklus pemodelan yang dilalui. Fokus analisis diarahkan pada model matematis yang dihasilkan di setiap siklus serta tahapan siklus Blum dan Leiss yang dilalui selama proses pembentukannya. Tugas MEA yang diberikan menuntut kelompok merancang metode yang dapat digunakan berulang oleh pengelola taman untuk menganalisis profil ketinggian jalur pendakian berdasarkan grafik gradien yang tersedia. Grafik gradien yang diberikan menampilkan hubungan antara gradien jalur  $g(w)$  dan jarak horizontal dari titik awal jalur (0 hingga 5.000 meter) dengan variasi yang kompleks, puncak positif tertinggi sekitar  $x = 1.200$  m, nilai negatif terdalam sekitar  $x = 1.700$  m, puncak positif kedua sekitar  $x = 2.800$  m, kemudian turun kembali ke nilai negatif hingga akhir jalur. Secara matematis, grafik ini merepresentasikan  $g(w) = f'(w)$ , yakni fungsi turunan dari profil ketinggian  $f(w)$  yang menjadi objek rekonstruksi. Sumbu gradien sengaja tidak dilengkapi skala numerik agar mahasiswa terdorong membangun strategi estimasi secara mandiri. Gambaran perkembangan model yang dihasilkan kelompok pada setiap siklus disajikan secara ringkas

pada Tabel 1, sementara uraian rinci dan pembahasan tiap siklus disajikan pada subbagian berikut.

**Tabel 1**  
**Ringkasan Perkembangan Model Matematis Kelompok Lintas Tiga Siklus**

Aspek	Siklus 1	Siklus 2	Siklus 3
Strategi Matematis	$\Delta h = g(x) \cdot \Delta x$ , $\Delta x = 500\text{m}$	$\Delta h = g(x) \cdot \Delta x$ , $\Delta x = 100\text{m}$	$f(b) = \int_a^b g(w) dw + f(a)$ via TDK 2
Konsep yang mendasari	Right Riemann Sum (implisit)	Right Riemann Sum lebih halus (implisit)	Integral tentu + TDK 2 (eksplisit)
Alat Komputasi	Perhitungan manual	Spreadsheet Excel	Estimasi geometris (luas segitiga)
Jenis Model	Numerik kasar	Numerik halus	Formal-konseptual
Alur Tahapan	Linear	Semi-integratif	Iteratif non-linear
Karakter Validasi	Retrospektif	Eksternal-komparatif	Terintegrasi dan berlapis

### Siklus 1: Model Numerik Kasar Berbasis Definisi Gradien Tahapan Pemodelan dan Model yang Dihasilkan

Siklus pertama dimulai dengan tahapan *understanding the task* yang menampilkan peristiwa analitis penting berupa munculnya miskonsepsi awal. Kelompok pada awalnya memperlakukan grafik gradien seolah-olah merupakan grafik profil ketinggian. Salah satu anggota, SR, langsung mengidentifikasi puncak dan lembah dari grafik yang tersedia, yang menunjukkan bahwa kelompok belum membedakan antara  $g(w) = f'(w)$  dan  $f(w)$  sebagai dua representasi matematis yang berbeda.

Koreksi terhadap miskonsepsi ini dilakukan secara mandiri oleh SS1, yang menegaskan bahwa grafik yang diberikan adalah *grafik gradien*, bukan grafik ketinggian, sehingga profil ketinggian masih harus direkonstruksi. ST kemudian merumuskan tujuan secara lebih tepat: "*gambaran itu lengkap dengan ketinggian, berdasarkan dari grafik gradiennya*". Koreksi mandiri ini menandai berakhirnya tahap pemahaman awal sekaligus menjadi titik awal proses pemodelan yang lebih terarah.

Memasuki tahapan *simplifying and structuring*, kelompok membuat keputusan pemodelan dengan membagi jalur menjadi segmen-segmen diskret dengan interval  $\Delta x = 500\text{m}$  pada titik-titik  $x = 0,500,1000, \dots, 5000\text{m}$ . Pada setiap titik tersebut, nilai gradien dibaca secara visual dari grafik. Tahapan *mathematizing* terjadi ketika kelompok menerjemahkan hubungan antara gradien dan perubahan ketinggian ke dalam bentuk matematis. Kelompok menuliskan rumus gradien sebagai landasan formal:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots (2)$$

yang kemudian dimanipulasi secara aljabar untuk memperoleh model komputasional:

$$h(x + \Delta x) = h(x) + g(x + \Delta x) \cdot \Delta x \dots (3)$$

dengan  $\Delta x = 500\text{m}$  dan  $h(0) = 0$  sebagai referensi ketinggian awal. Kelompok membaca nilai gradien pada titik akhir setiap selang, yakni  $g(x + \Delta x)$ , sehingga persamaan (3) secara matematis setara dengan *Right Riemann Sum*:

$$h(x_n) = h(0) + \sum_{k=1}^n g(x_k) \cdot \Delta x, \quad \Delta x = 500 \text{ m} \quad (4)$$

meskipun pada tahap ini kelompok belum menyadari keterkaitan antara strategi yang mereka gunakan dengan konsep integral.

Pada tahapan *working mathematically*, kelompok mengeksekusi persamaan (3) secara manual dan berurutan untuk setiap interval. Perhitungan untuk tiga selang pertama menghasilkan:  $h(500) = 0,2 \times 500 = 100$ ,  $h(1000) = 100 + 1,1 \times 500 = 650$ , dan  $h(1500) = 650 + 1,3 \times 500 = 1300$ . Pola ini dilanjutkan hingga  $x = 5000$ , menghasilkan tabel lengkap 11 pasangan  $(x, h(x))$  yang kemudian digambarkan secara manual sebagai sketsa profil ketinggian. Pada sketsa tersebut kelompok memberi anotasi langsung: “terdapat 2 titik puncak dan 1 lembah, serta menandai region-region *menanjak curam, menurun curam, dan lembah*,” menunjukkan bahwa tahapan *interpreting* berlangsung secara terintegrasi selama penggambaran.

Tahapan *validating* muncul di akhir siklus sebagai pengecekan visual terhadap kesesuaian antara sketsa ketinggian dan tanda-tanda gradien pada grafik asal. Siklus pertama ditutup dengan tahapan *presenting* berupa penyusunan Email v1 yang merumuskan metode dalam lima langkah, di antaranya: “Mencari ketinggian asli per interval dengan rumus  $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ ” dan “Menggambarkan grafik ketinggian berdasarkan analisis grafik gradien.” Alur tahapan Siklus 1 dapat direpresentasikan sebagai:

$$UT \rightarrow SS \rightarrow MA \rightarrow WM \rightarrow IN \rightarrow PR \rightarrow VA \dots (5)$$

### Pembahasan Siklus 1

Miskonsepsi awal pada tahap *understanding the task* yaitu memperlakukan grafik turunan sebagai grafik fungsi asal. Hal ini mencerminkan lemahnya pemahaman kovariasional antara  $f'(w)$  dan  $f(w)$ , yang dilaporkan sebagai salah satu tantangan utama dalam pembelajaran antiturunan grafikal (García-García & Dolores-Flores, 2021; Yoon, 2015). Namun demikian, koreksi yang dilakukan secara mandiri menunjukkan adanya mekanisme *self-monitoring* yang mulai berkembang dalam proses diskusi kelompok.

Strategi yang digunakan kelompok, yaitu penjumlahan diskret melalui persamaan (3) dan (4), menunjukkan bahwa mereka secara implisit telah menerapkan pendekatan *Right Riemann Sum*. Hal ini mengindikasikan adanya intuisi matematis yang tepat, di mana kelompok memahami bahwa

perubahan ketinggian dapat diperoleh melalui akumulasi hasil kali gradien dan panjang interval, meskipun belum diformalkan dalam kerangka integral.

Struktur proses yang cenderung linear, sebagaimana terlihat pada persamaan (5), dengan validasi yang muncul di akhir, menunjukkan bahwa pada tahap awal mahasiswa masih memandang pemodelan sebagai prosedur berurutan. Pola ini sejalan dengan temuan bahwa pemodelan pemula cenderung belum mengintegrasikan proses refleksi secara berkelanjutan dalam aktivitas pemodelan (Hamilton et al., 2020; Passarella, 2022)(Shahbari & Tabach, 2020; Shahbari & Tabach, 2019).

Keterbatasan utama model pada siklus ini terletak pada rendahnya akurasi akibat penggunaan interval 500 m yang relatif besar. Interval ini menyebabkan variasi lokal pada grafik gradien tidak tertangkap secara memadai, sehingga beberapa karakteristik penting dari profil ketinggian tidak terrepresentasikan secara optimal.

Aspek desain tugas yang perlu dicermati secara mendalam adalah ketiadaan skala numerik pada sumbu gradien, yang merupakan *deliberate constraint* yakni pembatasan yang dirancang secara sengaja untuk tujuan pedagogis tertentu. Ketika skala numerik dihilangkan, mahasiswa kehilangan akses terhadap prosedur rutin yang paling mudah yakni membaca nilai dari grafik secara langsung, sehingga mereka terpaksa mengembangkan strategi estimasi secara mandiri. Fenomena ini tampak jelas ketika kelompok harus memutuskan bagaimana memperoleh nilai gradien pada setiap titik di Siklus 1, dan kemudian berkembang lebih jauh di Siklus 3 ketika kelompok menggunakan estimasi luas segitiga untuk menghitung nilai integral tentu. Tanpa *deliberate constraint* ini, besar kemungkinan kelompok akan berhenti pada pembacaan nilai dan substitusi rumus, yakni aktivitas prosedural yang tidak memerlukan konstruksi model matematis yang sesungguhnya. Dalam perspektif desain MEA, *deliberate constraint* semacam ini berfungsi untuk memenuhi *model construction principle* yakni tugas tidak dapat diselesaikan tanpa pembentukan model yang eksplisit (Lesh et al., 2000). Lebih jauh, ini juga mendorong apa yang disebut Brousseau (1997) sebagai *situation adidactique* yakni kondisi belajar di mana mahasiswa harus mengonstruksi pengetahuan tanpa panduan eksplisit, karena situasinya sendiri yang menuntut hal tersebut. Dengan demikian, absennya skala numerik bukan sekadar fitur teknis tugas, melainkan elemen desain yang secara sistematis menggeser aktivitas mahasiswa dari *executing* menuju *constructing*.

## **Siklus 2: Model Numerik Halus Berbantuan Teknologi Tahapan Pemodelan dan Model yang Dihasilkan**

Transisi menuju Siklus 2 dipicu oleh sesi *sharing solution* dalam diskusi kelas, di mana kelompok subjek membandingkan model mereka dengan dua kelompok lain. Dalam sesi ini, ST mengidentifikasi kelemahan model Siklus 1 secara eksplisit: "*ketika kita mengerjakan grafik jarak ketinggian dengan interval 500 kan ternyata hasilnya kurang akurat, dan menyebabkan poin-*

*point dasar yang penting malah tidak diketahui*". Refleksi komparatif ini mendorong keputusan revisi yang dirumuskan SS2: "yang harus direvisi oleh kelompok kami adalah pemilihan titik-titik di grafik gradien, memilih interval yang lebih kecil, yakni per 100".

Pada tahapan *simplifying and structuring*, kelompok mempertahankan strategi dasar yang sama namun membuat keputusan kunci dengan memperkecil selang dari 500 m menjadi 100 m, sehingga diperoleh 50 titik perhitungan ( $x = 0, 100, 200, \dots, 5000$ ). Model matematis yang digunakan tetap berbasis persamaan (3), kini dengan  $\Delta x = 100$ , sehingga secara matematis merupakan *Right Riemann Sum* yang lebih halus:

$$h(x_n) = h(0) + \sum_{k=1}^n g(x_k) \cdot \Delta x, \quad \Delta x = 100 \dots (6)$$

Perbedaan mendasar pada siklus ini terletak pada integrasi antara tahap *mathematising* dan *working mathematically* melalui pemanfaatan spreadsheet Excel. Kelompok menyusun tiga kolom utama yaitu *gradien*, *panjang lintasan*, dan *tinggi*, kemudian menggunakan formula Excel untuk mengotomatisasi seluruh proses akumulasi pada persamaan (6). Dengan demikian, konstruksi model dan eksekusi perhitungan berlangsung secara simultan.

Hasil dari proses ini berupa dua grafik yang dihasilkan secara otomatis, yaitu Grafik Gradien dan Grafik Tinggi. Grafik Tinggi menunjukkan profil ketinggian dengan puncak pertama sekitar  $h \approx 1265\text{m}$  pada  $x \approx 1700\text{m}$ , lembah pada  $x \approx 2600\text{m}$ , puncak kedua sekitar  $h \approx 835\text{m}$  pada  $x \approx 3200\text{m}$ , serta penurunan hingga  $h = -115\text{m}$  pada  $x = 5000\text{m}$ . Nilai negatif ini merupakan konsekuensi matematis yang valid dari dominasi gradien negatif pada segmen akhir jalur.

Tahap *validating* pada siklus ini berkembang menjadi proses komparatif-eksternal. Selain memeriksa konsistensi internal model, kelompok secara aktif membandingkan pendekatan mereka dengan kelompok lain, serta mempertanyakan dasar matematis dari metode yang digunakan, sebagaimana diungkapkan oleh ST: "Kurang jelas dasarnya, dapat rumus itu darimana".

Siklus kedua ditutup dengan tahap *presenting* melalui penyusunan Email v2, yang secara eksplisit merekomendasikan penggunaan selang 100 m dan Excel, disertai analisis koordinat yang lebih presisi. Alur tahapan pada Siklus 2 dapat direpresentasikan sebagai:

$$UT \rightarrow SS \rightarrow [MA \leftrightarrow WM] \rightarrow IN \rightarrow VA_{\text{eksternal}} \rightarrow PR \dots (7)$$

Tanda  $\leftrightarrow$  pada persamaan (7) menandai integrasi antara *mathematising* dan *working mathematically* yang difasilitasi oleh teknologi.

## Pembahasan Siklus 2

Perubahan dari selang 500 m menjadi 100 m tidak hanya merepresentasikan peningkatan akurasi teknis, tetapi juga menunjukkan adanya kesadaran empiris terhadap prinsip konvergensi numerik: semakin

kecil nilai  $\Delta x$ , semakin mendekati nilai integral yang sebenarnya. Namun sebelum membahas perubahan tersebut, penting untuk memahami mengapa transisi dari Siklus 1 ke Siklus 2 terjadi secara kognitif. Pemicu transisi bukan berasal dari intervensi dosen, melainkan dari disequilibrium kognitif (Piaget, 1985) yang muncul ketika kelompok membandingkan model mereka dengan model kelompok lain dalam sesi *sharing solution*. Identifikasi ST bahwa hasil Siklus 1 kurang akurat dan poin-poin dasar yang penting tidak diketahui menunjukkan bahwa kelompok telah mengembangkan kemampuan untuk mengevaluasi model bukan hanya dari apakah model itu bekerja, tetapi dari seberapa baik model itu merepresentasikan realitas yang merupakan inti dari tahap *validating* dalam siklus Blum dan Leiss. Dengan demikian, transisi ke Siklus 2 bukan sekadar keputusan teknis, melainkan cerminan berkembangnya orientasi kritis terhadap kualitas model matematis.

Secara matematis, perubahan dari  $\Delta x=500$  menjadi  $\Delta x=100$  merepresentasikan peningkatan resolusi aproksimasi yang mengarah pada konvergensi: semakin kecil nilai  $\Delta x$ , semakin mendekati nilai integral sejati  $\int_0^x g(w)dw$ . Kelompok sampai pada pemahaman ini melalui perbandingan hasil secara induktif, bukan melalui deduksi formal — sebuah lintasan belajar organik di mana pemahaman terhadap konsep limit dalam integral berkembang dari pengalaman numerik yang berulang (Czocher, 2018).

Kelompok sampai pada pemahaman ini melalui perbandingan hasil secara induktif, bukan melalui deduksi formal. Proses ini mencerminkan lintasan belajar yang bersifat organik, di mana pemahaman terhadap konsep limit dalam integral berkembang dari pengalaman numerik yang berulang.

Pemanfaatan Excel pada siklus ini juga berdampak pada perubahan struktur aktivitas pemodelan. Ketika perhitungan akumulasi pada 50 titik diotomatisasi melalui formula spreadsheet, beban kognitif yang semula harus dialokasikan untuk eksekusi aritmetis berulang pada tahap *working mathematically* dapat dibebaskan dan dialihkan menuju aktivitas interpretasi serta evaluasi pola pada tahap *interpreting* dan *validating*. Fenomena ini sejalan dengan konsep *cognitive offloading* (Risko & Gilbert, 2016), yaitu mekanisme di mana teknologi tidak menggantikan pemikiran matematis, melainkan menggeser jenis pemikiran yang dapat dilakukan. Dampaknya, batas antara tahap *mathematising* dan *working mathematically* menjadi semakin samar, sebagaimana tercermin dalam tanda  $\leftrightarrow$  pada alur (7). Integrasi ini bukan merupakan kelemahan metodologis, melainkan dampak langsung dari mediasi teknologi yang memungkinkan iterasi model berlangsung lebih cepat. Kelompok kini dapat mengamati secara langsung konsekuensi dari setiap keputusan pemodelan dalam bentuk grafik, sehingga siklus antara membangun model dan mengevaluasi hasilnya menjadi jauh lebih pendek dibandingkan Siklus 1. Dengan demikian, teknologi berfungsi sebagai *mediator kognitif* yang mengubah bukan hanya kecepatan, tetapi juga kedalaman proses pemodelan yang dapat dicapai (Daher & Shahbari, 2015; Swidan & Yerushalmy, 2014). Perubahan struktural inilah yang menjadi

prasyarat bagi kemunculan pertanyaan konseptual di akhir Siklus 2, sebab kelompok baru dapat mempertanyakan dasar matematis dari metode yang digunakan justru karena mereka tidak lagi terbebani oleh eksekusi teknisnya.

Selain itu, kemunculan validasi eksternal-komparatif menunjukkan perkembangan penting dalam cara kelompok mengevaluasi model. Kelompok tidak lagi sekadar memeriksa apakah hasil yang diperoleh benar secara numerik, tetapi mulai mempertanyakan dasar matematis dari metode yang digunakan. Pergeseran ini menandai perubahan dari orientasi prosedural menuju orientasi konseptual, yang menjadi landasan bagi lompatan pemahaman pada Siklus 3.

### **Siklus 3: Formalisasi Model Berbasis Integral Tentu dan TDK 2 Tahapan Pemodelan dan Model yang Dihasilkan**

Transisi menuju Siklus 3 dipicu oleh dua peristiwa yang terjadi dalam satu sesi diskusi kelas pasca presentasi Siklus 2. Pertama, kelompok tidak mampu menjawab pertanyaan tentang keterkaitan metode mereka dengan kalkulus integral, sebagaimana diakui SS2: *"Kita belum bisa memberikan penjelasan karena kita tidak menggunakan aplikasi integral"*. Kedua, kelompok mengamati kelompok lain yang menggunakan pendekatan integral untuk menyelesaikan masalah yang sama, sehingga memunculkan apa yang dapat disebut sebagai paradoks produktif. SS1 menilai pendekatan tersebut *"lebih ribet"*, namun SS2 menangkap implikasinya: *"kita jadi tahu kalau soal itu dapat diselesaikan dengan konsep integral"*. Berdasarkan situasi tersebut, ST kemudian merumuskan agenda Siklus 3: *"membuat metode yang lebih simple, dan mungkin klunya berkaitan dengan konsep-konsep yang ada di kalkulus integral itu"*.

Pada tahapan *simplifying and structuring*, kelompok melakukan strukturisasi konseptual terhadap grafik gradien dengan mengidentifikasi titik-titik kritis secara analitis berdasarkan sifat-sifat  $f'$ . Sebagaimana dituliskan dalam lembar kerja: *"Mengidentifikasi titik-titik kritis pada grafik gradien (titik potong terhadap sumbu w, titik puncak maksimum lokal, minimum lokal), kemudian mengidentifikasi bagian-bagiannya."* Kelompok membagi grafik ke dalam delapan interval dan menganalisis setiap interval menggunakan dua kriteria simultan, yaitu tanda  $f'(w)$  untuk menentukan kenaikan atau penurunan, serta perubahan nilai  $f'(w)$  untuk menentukan kecekungan. Hasilnya berupa sketsa grafik ketinggian kualitatif yang lebih kaya dibandingkan Siklus 1, dilengkapi dengan anotasi kecekungan pada setiap segmen.

Tahap *mathematizing* pada Siklus 3 menandai formalisasi konseptual yang penting dalam keseluruhan proses. Kelompok secara eksplisit menuliskan dalam lembar kerja: *"Ketinggian  $f(w)$  adalah integral dari gradien  $f'(w) = g(w)$ . Setiap area di bawah kurva  $g(w)$  baik di atas sumbu w maupun di bawah merepresentasikan perubahan ketinggian."* Berdasarkan

pemahaman ini, kelompok merumuskan model matematis formal untuk menentukan ketinggian di sembarang titik kritis  $b$ :

$$f(b) = \int_a^b g(w) dw + f(a) \dots (8)$$

Persamaan (8) dituliskan secara eksplisit dalam lembar kerja sebagai bentuk operasional dari Teorema Dasar Kalkulus bagian 2 (TDK 2):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(w) dw \dots (9)$$

Nilai setiap integral tentu kemudian dihitung melalui estimasi luas daerah geometris di bawah kurva gradien, dengan mengaproksimasi setiap segmen kurva sebagai segitiga dengan rumus  $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$ . Untuk ketinggian puncak pertama di  $x = 1850$  m:

$$\int_0^{1300} g(w) dw \approx \frac{1}{2} \times 1300 \times 1,65 = 1072,5 \dots (10)$$

$$\int_0^{1850} g(w) dw = 1072,5 + 453,75 = 1526,25 \dots (11)$$

$$\therefore f(1850) = 1526,25 \text{ m} \dots (12)$$

Pada tahapan *working mathematically*, kelompok mengeksekusi persamaan (8) dan (9) untuk seluruh titik kritis. Namun pada titik ini muncul loop revisi yang paling signifikan dalam keseluruhan proses. Ketika menghitung ketinggian puncak kedua, kelompok awalnya memperoleh:

$$\int_{2650}^{3200} g(w) dw \approx \frac{1}{2} \times 200 \times 0,5 + \frac{1}{2} \times 350 \times 0,5 = 50 + 87,5 = 137,5 \dots (13)$$

Kelompok kemudian menyadari bahwa hasil tersebut hanya merepresentasikan perubahan ketinggian relatif, bukan ketinggian absolut. Kesadaran ini mendorong mereka kembali ke tahap *mathematising* untuk memperkuat kerangka konseptual melalui persamaan (9), sehingga dilakukan revisi perhitungan menggunakan persamaan (8):

$$f(2650) = \int_{1850}^{2650} g(w) dw + f(1850) = -687,5 + 1526,25 = 838,75 \dots (14)$$

$$f(3200) = \int_{2650}^{3200} g(w) dw + f(2650) = 137,5 + 838,75 = 976,25 \dots (15)$$

Hasil perhitungan lengkap untuk titik-titik kritis disajikan pada Tabel 2.

**Tabel 2**  
**Ketinggian Titik-Titik Kritis Hasil Perhitungan Integral Siklus 3**

Titik	$x$ (m)	Persamaan yang Digunakan	$f(x)$ (m)
Titik awal	0	$f(0) = 0$ (referensi)	0
Puncak pertama	1850	Persamaan (11)	1526,25
Lembah	2650	Persamaan (14)	838,75
Puncak kedua	3200	Persamaan (15)	976,25

Tahap *interpreting* pada siklus ini menunjukkan kedalaman terbaik dibandingkan siklus sebelumnya. Kelompok menafsirkan nilai integral positif sebagai kenaikan ketinggian, nilai negatif sebagai penurunan, serta nilai absolut integral sebagai besaran perubahan ketinggian.

Tahap *validating* bersifat terintegrasi dan berlapis. Validasi pertama memicu *loop* konseptual menuju penguatan penggunaan TDK 2, sedangkan validasi kedua berfungsi untuk memeriksa konsistensi fisik urutan nilai ketinggian yang diperoleh.

Siklus ketiga ditutup dengan tahap *presenting* melalui Email v3, yang secara eksplisit mengomunikasikan prinsip integral sebagai akumulasi perubahan: “*ketinggian lintasan dapat diperoleh dari akumulasi perubahan gradien (luas daerah di bawah kurva)*”, disertai metode yang bersifat generalisabel serta nilai ketinggian pada titik-titik kritis.

Alur tahapan Siklus 3 direpresentasikan sebagai:

$$UT \xrightarrow{\text{jump}} [SS \rightarrow MA] \rightarrow WM \rightarrow VA_1 \cup [MA \rightarrow WM]_{TDK} \rightarrow IN \rightarrow VA_2 \rightarrow PR \dots (16)$$

Tanda  $\cup$  pada persamaan (16) merepresentasikan *loop* dari *working mathematically* kembali ke *mathematising* yang dipicu oleh inkonsistensi konseptual, sedangkan *jump* dari tahap *understanding* menuju tahap berikutnya menunjukkan berkembangnya efisiensi kognitif dalam proses pemodelan.

### Pembahasan Siklus 3

Transisi dari Siklus 2 ke Siklus 3 memiliki karakter kognitif yang secara mendasar berbeda dari transisi sebelumnya. Apabila transisi Siklus 1 menuju Siklus 2 dipicu oleh ketidakpuasan terhadap akurasi model, maka transisi Siklus 2 menuju Siklus 3 dipicu oleh ketidakpuasan terhadap landasan konseptual model itu sendiri. Kelompok tidak lagi mempersoalkan apakah hasil yang diperoleh cukup akurat, melainkan mulai mempertanyakan mengapa metode tersebut bekerja dan dari mana dasar pembentukannya. Pergeseran orientasi pertanyaan ini, dari pertanyaan yang bersifat empiris menuju pertanyaan yang bersifat epistemis, merepresentasikan lompatan kognitif yang signifikan dalam proses pemodelan. Dalam kerangka Sfard (1991), pergeseran tersebut mencerminkan transisi dari pemahaman yang bersifat operasional, yakni pemahaman tentang bagaimana suatu prosedur dilakukan, menuju pemahaman yang bersifat struktural, yakni pemahaman tentang apa yang sesungguhnya dihitung dan mengapa prosedur tersebut valid secara matematis. Situasi paradoks yang dialami kelompok, di mana mereka menilai pendekatan integral kelompok lain lebih rumit namun pada saat bersamaan menyadari bahwa pendekatan tersebut memiliki dasar konseptual yang lebih kokoh, menjadi pemicu kognitif yang mendorong agenda formalisasi pada Siklus 3. Fenomena ini selaras dengan konsep *productive struggle* (Kapur, 2016), yaitu kondisi di mana kebuntuan

konseptual justru berfungsi sebagai katalis bagi perkembangan pemahaman yang lebih mendalam.

*Loop* yang terjadi pada Siklus 3 memiliki karakter yang secara mendasar berbeda dengan pengulangan prosedur. Perbedaan antara persamaan (13) dan persamaan (15) tidak terletak pada kesalahan aritmetis, melainkan pada pergeseran kerangka konseptual. Kelompok menyadari bahwa mereka telah menghitung perubahan ketinggian relatif, padahal yang dibutuhkan adalah nilai ketinggian absolut. Koreksi ini tidak dipicu oleh instruksi atau umpan balik dosen, melainkan muncul secara mandiri dari mekanisme validasi internal kelompok, sehingga dapat dikategorikan sebagai *self-initiated conceptual repair* yang menjadi penanda penting dari *modeling competency* tingkat lanjut.

Dalam kerangka kompetensi pemodelan, kemampuan untuk mendeteksi inkonsistensi konseptual secara mandiri dan melakukan *local loop* yang tertarget, yakni kembali ke tahap *mathematizing* semata-mata untuk memperkuat penggunaan TDK 2 tanpa mengulang seluruh proses dari awal, merupakan bukti bahwa kelompok tidak sekadar mengikuti prosedur, tetapi telah memiliki pemahaman struktural tentang apa yang sedang mereka bangun. Blum (2015) secara eksplisit mengidentifikasi kemampuan melakukan revisi model yang terarah sebagai salah satu ciri pemodelan yang matang. Dengan demikian, *loop* pada alur (16) bukan merupakan indikasi kegagalan atau kebingungan, melainkan merupakan ekspresi dari kemampuan *metacognitive monitoring* yang telah berkembang dalam diri kelompok. Pola ini konsisten dengan pandangan Stillman et al. (2015) bahwa pemodelan yang matang ditandai oleh kemampuan pemodel untuk menginterupsi prosesnya sendiri secara produktif ketika mendeteksi ketidaksesuaian antara hasil matematis dan makna kontekstualnya. Secara khusus, transisi dari persamaan (13) menuju persamaan (14) dan (15) mencerminkan berkembangnya pemahaman kelompok terhadap TDK 2 sebagai prinsip akumulasi, selaras dengan apa yang dikemukakan Tall (2013) tentang perkembangan dari *procept* prosedural menuju pemahaman konseptual yang lebih dalam dalam kalkulus.

Selain itu, konsistensi antara model yang tertuang dalam lembar kerja dan model yang dikomunikasikan dalam Email v3 merupakan capaian yang tidak tampak pada dua siklus sebelumnya. Hal ini menunjukkan bahwa kelompok telah mencapai koherensi antara pemahaman konseptual, kemampuan komputasional, dan kemampuan komunikasi matematis secara bersamaan. Koherensi ini merupakan bagian dari *presenting competency* yang oleh Blum (2015) dipandang sebagai komponen integral dalam kematangan pemodelan matematis.

### **Perkembangan Profil Pemodelan Lintas Tiga Siklus**

Jika ditinjau secara keseluruhan, profil pemodelan kelompok selama tiga siklus memperlihatkan dua dimensi perkembangan yang berjalan secara

paralel. Dimensi pertama adalah perkembangan model matematis dari model numerik kasar pada Siklus 1 (persamaan 4), menuju model numerik halus pada Siklus 2 (persamaan 6), hingga model formal berbasis integral tentu dan TDK 2 pada Siklus 3 (persamaan 8 dan 9). Dimensi kedua adalah perkembangan struktur proses pemodelan dari alur yang cenderung linear pada persamaan (5), menuju alur semi-integratif pada persamaan (7), hingga alur iteratif non-linear pada persamaan (16).

Perkembangan model tersebut secara tidak langsung merepresentasikan rekonstruksi organik fondasi konseptual kalkulus integral. Pada Siklus 1, pendekatan yang digunakan setara dengan *Right Riemann Sum* yang masih bersifat implisit. Pada Siklus 2, terjadi peningkatan ketelitian melalui perapatan selang yang mengarah pada konvergensi numerik. Pada Siklus 3, proses tersebut mencapai tahap formalisasi melalui penggunaan integral tentu dan TDK 2 secara eksplisit.

Lesh dan Doerr (2003) menyebut pola perkembangan semacam ini sebagai *model development sequence*, yaitu proses di mana representasi matematis berkembang dari bentuk informal menuju bentuk formal melalui serangkaian revisi. Temuan ini juga sejalan dengan pandangan Borrromeo Ferri (2006) dan (Shahbari & Tabach, 2020) bahwa proses pemodelan dalam konteks pembelajaran tidak bersifat linear, dan bahwa *local loop* maupun *jumping* merupakan karakteristik dari pemodelan yang matang, bukan indikasi kegagalan proses.

Secara khusus, evolusi peran validasi sepanjang tiga siklus menjadi indikator paling jelas dari berkembangnya *modeling competency* kelompok. Pada Siklus 1, validasi bersifat retrospektif sebagai pengecekan akhir. Pada Siklus 2, validasi berkembang menjadi komparatif-eksternal melalui perbandingan dengan kelompok lain. Pada Siklus 3, validasi berfungsi sebagai mekanisme koreksi konseptual yang terintegrasi dalam proses pemodelan. Pola perkembangan ini belum banyak didokumentasikan secara empiris dalam studi pemodelan matematika pada konteks kalkulus integral (Czocher, 2018; Jung & Brady, 2023).

Dimensi penting lain yang perlu digarisbawahi adalah sejauh mana produk akhir kelompok memenuhi *model generalization principle* dari MEA (Chamberlin & Moon, 2005). Prinsip ini mensyaratkan bahwa model yang dihasilkan tidak bersifat *problem-specific*, melainkan dapat diterapkan pada situasi lain yang memiliki struktur serupa. Apabila ditinjau dari perkembangan produk lintas tiga siklus, terdapat trajektori yang jelas menuju generalisabilitas. Email v1 mendeskripsikan prosedur spesifik untuk jalur dengan interval 500 m, sedangkan Email v2 merekomendasikan pendekatan yang lebih akurat namun masih terikat pada alat komputasi tertentu, yaitu spreadsheet Excel. Email v3 mengomunikasikan prinsip yang bersifat universal, bahwa ketinggian lintasan dapat diperoleh dari akumulasi perubahan gradien yang direpresentasikan sebagai luas daerah di bawah kurva, disertai persamaan (8) dan (9) sebagai representasi formal yang

berlaku untuk grafik gradien apa pun, tidak terbatas pada jalur pendakian yang menjadi konteks tugas. Pergeseran dari prosedur penyelesaian yang bersifat konteks-spesifik menuju metode umum untuk merekonstruksi profil ketinggian dari grafik gradien sembarang inilah yang menandai bahwa kelompok tidak hanya menyelesaikan masalah yang diberikan, tetapi telah merumuskan suatu *generalizable method*, sebuah pencapaian yang merupakan tujuan utama MEA sebagai instrumen pemodelan (Lesh & Doerr, 2003; Sevinc & Lesh, 2017). Hal ini sekaligus menjadi bukti empiris bahwa desain tugas MEA yang digunakan berhasil memicu proses yang melampaui penyelesaian masalah konvensional.

Penelitian ini memberikan dua kontribusi utama. Secara teoretis, penelitian ini menghadirkan dokumentasi empiris mengenai sifat iteratif dan non-linear dari siklus Blum dan Leiss dalam konteks pembelajaran antiturunan grafikal. Temuan ini memperkaya bukti tentang bagaimana model matematis berkembang secara progresif melalui pengalaman pengerjaan tugas MEA yang berulang.

Secara praktis, temuan bahwa tugas MEA berbasis antiturunan grafikal mampu memfasilitasi perkembangan dari pendekatan *Right Riemann Sum* yang bersifat implisit menuju penggunaan integral formal memberikan implikasi langsung bagi pembelajaran kalkulus integral. Rancangan tugas yang tidak menyertakan skala numerik pada grafik gradien, dikombinasikan dengan siklus pengerjaan, presentasi, dan revisi, terbukti mendorong mahasiswa membangun pemahaman konseptual tentang integral, bukan sekadar prosedural. Dengan demikian, tugas MEA dapat berfungsi sebagai sarana yang efektif untuk mengembangkan pemahaman konsep melalui pengalaman pemodelan yang bermakna (Chamberlin & Moon, 2005; Lozada et al., 2023; Shahbari & Tabach, 2021).

### ***Kesimpulan***

Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan profil pemodelan matematis satu kelompok mahasiswa yang berhasil menyelesaikan tugas MEA pada mata kuliah Kalkulus Integral, ditinjau dari tahapan siklus Blum dan Leiss (2007). Berdasarkan hasil analisis terhadap proses pemodelan yang berlangsung selama tiga siklus, dapat disimpulkan bahwa kelompok mahasiswa berhasil membangun model matematis yang berkembang secara progresif dari model numerik kasar berbasis definisi gradien pada Siklus 1, menuju model numerik halus berbantuan teknologi pada Siklus 2, dan akhirnya menuju model formal berbasis integral tentu dan Teorema Dasar Kalkulus bagian 2 pada Siklus 3. Perkembangan ini mencerminkan pergeseran yang mendasar, bukan sekadar peningkatan akurasi, melainkan perubahan paradigma dalam cara kelompok memandang dan merepresentasikan hubungan antara grafik gradien dan profil ketinggian jalur.

Ditinjau dari struktur tahapan siklus Blum dan Leiss, profil pemodelan kelompok menunjukkan karakteristik yang semakin kompleks

dan non-linear seiring berjalannya siklus. Pada Siklus 1, tahapan dilalui secara linear dengan validasi yang bersifat retrospektif. Pada Siklus 2, integrasi antara tahapan *mathematising* dan *working mathematically* mulai tampak, disertai munculnya validasi eksternal-komparatif dalam sesi diskusi kelas. Pada Siklus 3, alur pemodelan berkembang menjadi sepenuhnya iteratif dan non-linear yang ditandai oleh *jumping* dari *understanding* langsung ke *mathematising*, serta *local loop* dari *working mathematically* kembali ke *mathematising* ketika kelompok menyadari perlunya penerapan TDK 2 untuk memperoleh nilai ketinggian yang konsisten secara akumulatif. Evolusi peran tahapan *validating* menjadi penanda paling jelas dari perkembangan kematangan pemodelan kelompok yakni dari pengecekan akhir yang pasif pada Siklus 1, menjadi pencarian konfirmasi eksternal yang aktif pada Siklus 2, hingga mekanisme koreksi konseptual yang terintegrasi pada Siklus 3. Konsistensi antara model dalam lembar kerja dan model yang dikomunikasikan dalam email pada Siklus 3 menunjukkan bahwa kelompok telah mencapai koherensi antara pemahaman konseptual, kemampuan komputasional, dan kemampuan komunikasi matematis secara bersamaan.

Berdasarkan temuan tersebut, beberapa saran dapat dirumuskan untuk pengembangan penelitian dan praktik pembelajaran selanjutnya. Pertama, miskonsepsi awal yang ditemukan pada Siklus 1 yakni kecenderungan mahasiswa memperlakukan grafik turunan sebagai grafik fungsi asal menunjukkan perlunya perhatian khusus pada pengembangan pemahaman kovariasional dalam pembelajaran antiturunan grafikal, sehingga penelitian yang secara spesifik mengkaji intervensi pembelajaran untuk mengatasi miskonsepsi ini sangat relevan untuk dilakukan. Kedua, penelitian ini hanya mengkaji satu kelompok yang berhasil menyelesaikan tugas MEA secara penuh. Penelitian lanjutan perlu melibatkan kelompok dengan profil keberhasilan yang berbeda, termasuk kelompok yang tidak berhasil mencapai model formal untuk memperoleh gambaran yang lebih komprehensif tentang variasi profil pemodelan mahasiswa. Ketiga, lintasan perkembangan konseptual dari Right Riemann Sum implisit menuju integral formal yang ditemukan dalam penelitian ini membuka peluang untuk merancang tugas MEA yang secara eksplisit memanfaatkan lintasan tersebut sebagai strategi pembelajaran konsep integral, yang layak untuk diteliti lebih lanjut melalui desain penelitian berbasis *design research* atau *learning trajectory*.

### **Daftar Pustaka**

- Aguilar, J. J. (2021). Modeling through model-eliciting activities: An analysis of models, elements, and strategies in high school. The cases of students with different level of achievement. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 13(1), 52–70.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? Dalam S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (hlm. 73–96). Springer.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? Dalam C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (hlm. 222–231). Horwood.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86–95.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Cevikbas, M., Kaiser, G., & Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. In *Educational Studies in Mathematics* (Vol. 109, Issue 2). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6>
- Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37–47.
- Chamberlin, S., Payne, A., Chamberlin, S., Payne, A. M., Kettler, T., Chamberlin, S., Payne, A. M., & Mathematical, T. K. (2020). Mathematical modeling: a positive learning approach to facilitate student International Journal of Mathematical Education in Mathematical modeling: a positive learning approach to facilitate student sense making in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 0(0), 1–14. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1788185>
- Chimmalee, B., & Anupan, A. (2022). Effect of Model-Eliciting Activities using Cloud Technology on the Mathematical Problem-Solving Ability of Undergraduate Students. *International Journal of Instruction*, 15(2), 981–996. <https://doi.org/10.29333/iji.2022.15254a>
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research*

- design: Choosing among five approaches* (4th ed.). SAGE Publications.
- Czocher, J. A. (2017). Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. *Mathematics Enthusiast*, 14(1–3), 129–140. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391>
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 137–159. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4>
- Daher, W. M., & Shahbari, J. A. (2015). Pre-Service Teachers' Modelling Processes Through Engagement With Model Eliciting Activities With a Technological Tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 25–46. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9464-2>
- Deniz, Ş., & Kurt, G. (2022). Investigation of mathematical modeling processes of middle school students in model-eliciting activities (MEAs): A STEM approach. *Participatory Educational Research*, 9(2), 150–177. <https://doi.org/10.17275/per.22.34.9.2>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1). <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- Guler, G., Sen, C., Ay, Z. S., & Ciltas, A. (2019). Engineering skills that emerge during model-eliciting activities (MEAs) based on 3D modeling done with mathematics pre-service teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 7(3), 251–270.
- Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Yoon, C. (2020). The Use of Reflection Tools to Build Personal Models of Problem-Solving. *Foundations for the Future in Mathematics Education*, 349–366. <https://doi.org/10.4324/9781003064527-21>
- Handajani, S., Pratiwi, H., & Mardiyana, M. (2018). The 21 st century skills with model eliciting activities on linear program. *Journal of Physics: Conference Series*, 1008(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1008/1/012059>
- Hayuhantika, D., Susiswo, S., Chandra, T. D., & Abdullah, A. H. (2024). *Pre-service Mathematics Teachers' Engagement in Model*.
- Hayuhantika, D., Tjandra, T. D., & Abdullah, A. H. (n.d.). *Facilitating Undergraduate Students' Productive Disciplinary Engagement Through Model-Eliciting Activities (MEA)*. 23(10), 17–31.
- Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM - Mathematics Education*, 53(3), 635–647. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x>

- Jung, H., & Brady, C. (2023). Modeling Actions Foregrounded in Whole-Class Modeling Discourse: A Case Study of a Model-Eliciting Activity and a Three-Act Task. *Mathematical Thinking and Learning*, 00(00), 1–24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2180849>
- Kapur, M. (2016). Examining productive failure, productive success, unproductive failure, and unproductive success in learning. *Educational Psychologist*, 51(2), 289–299.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. Dalam A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (hlm. 591–646). Lawrence Erlbaum Associates
- Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A., & Medina, R. (2023). Proposal of a Mathematical Modelling Activity to Facilitate Students' Learning of Ordinary Differential Equation Concepts. *Sustainability (Switzerland)*, 15(16), 1–22. <https://doi.org/10.3390/su151612483>
- Passarella, S. (2022). Supporting emergent modelling by implementing model eliciting activities: the case of 3D-Euclidean geometry. *Research in Mathematics Education*, 0(0), 1–20. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1994869>
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed.). SAGE Publications.
- Pertamawati, L., & Retnowati, E. (2019). Model-Eliciting Activities: Engaging students to make sense of the world. *Journal of Physics: Conference Series*, 1200(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1200/1/012003>
- Pino-Fan, L. R., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2018). Analysis of the Meanings of the Antiderivative Used by Students of the First Engineering Courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(6), 1091–1113. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2>
- Rusliah, N., Handican, R., Laswadi, Deswita, R., & Oktafia, M. (2021). Mathematical problem-solving skills on relation and function through Model-Eliciting Activities (MEAs). *Journal of Physics: Conference Series*, 1778(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1778/1/012016>
- Risko, E. F., & Gilbert, S. J. (2016). Cognitive offloading. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(9), 676–688.
- Şener, Z. T., & Dede, Y. (2022). Investigating design, implementation and evaluation process of the model eliciting activities: the perspective of

- model eliciting principles. *Irish Educational Studies*, 1–22. <https://doi.org/10.1080/03323315.2022.2090984>
- Sevinc, S. (2022). Toward a reconceptualization of model development from models-and-modeling perspective in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 611–638. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10096-3>
- Sevinc, S., & Lesh, R. (2017). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 301–314. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Shahbari, J. A., Daher, W., & Rasslan, S. (2014). Mathematical knowledge and the cognitive and metacognitive processes emerged in model-eliciting activities. *International Journal on New Trends in Education and Their Implications*, 5(2), 209–219.
- Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2019). *Adopting the Modelling Cycle for Representing Prospective and Practising Teachers' Interpretations of Students' Modelling Activities*. 179–196. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_10)
- Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers. *Educational Studies in Mathematics*, 105(2), 115–135. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2>
- Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2021). Making sense of the average concept through engagement in model-eliciting activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(8), 1143–1160. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1740803>
- Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2023). *Tracing the Emergence of Modeling Routines during Model-Eliciting Activities Juhaina Awawdeh Shahbari Al-Qasemi Academy Michal Tabach*.
- Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.). (2015). *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Springer.
- Swidan, O., & Yerushalmy, M. (2014). *Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment*. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0583-1>
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology*

*of Mathematics Education.*, 4, 281–288.

Yoon, C. (2015). Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 915–932. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6>